

# Connexions conformes sur un fibré vectoriel

JEAN-LOUIS MILHORAT

Département de Mathématiques et d'Informatique  
Université des Sciences et Techniques de Nantes  
2, rue de la Houssinière 44072 Nantes Cedex 03

**Abstract.** *We introduce a new formalism to define conformal connections on a vector bundle, endowed with a conformal class of pseudo-riemannian metrics of signature  $(p, q)$ . Using a bundle map, called isotropic transformation, we show that these non-linear connections are in one-to-one correspondence with metric connections on an enlarged pseudo-riemannian vector bundle, endowed with a metric of signature  $(p + 1, q + 1)$ . We then use this formalism to give an intrinsic definition of Cartan's conformal circles. Finally, as an example, we give a geometric interpretation of some results of relativistic electromagnetism, connecting to each electromagnetic field a conformal connection on the tangent bundle of the space-time manifold.*

## RESUMÉ

Nous développons une notion de connexion conforme basée sur le concept de connexion non-linéaire sur un fibré vectoriel. Nous montrons que ces connexions peuvent être associées de façon biunivoque à des connexions linéaires euclidiennes sur un fibré vectoriel «augmenté», selon une démarche inspirée d'un résultat classique d'algèbre sur le groupe conforme. Nous développons en particulier de cette manière la notion de «cercle conforme» de Cartan. Enfin, en guise d'exemple, nous introduisons une connexion conforme sur le fibré tangent de la variété espace-temps qui permet d'interpréter géométriquement des schémas physiques de type «électromagnétique pur».

---

**Key-Words:** *Groupe conforme. Groupe et espace de Möbius. Transformation isotropique. Connexion généralisée conforme.*

*1980 MSC: 53*

## INTRODUCTION

La plupart des travaux récents concernant la notion de connexion conforme se basent sur la théorie des  $G$ -structures :  $N$  étant une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$  strictement supérieure à 2, on considère  $P^2(N)$ , fibré des repères d'ordre 2 de  $N$ , de groupe structural  $G^2(n)$ . On peut définir un sous-groupe  $H^2(n)$  de  $G^2(n)$ , isomorphe à un sous-groupe d'isotropie de  $K(n)$ , groupe de Möbius d'ordre  $n$  agissant sur  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ . On considère ensuite un sous-fibré  $Q(N)$  de  $P^2(N)$  de groupe structural  $H^2(n)$ . De façon canonique, on peut alors définir une 1-forme sur  $Q(N)$  à valeurs dans l'algèbre de Lie de  $K(n)$ . Cette forme est associée à une connexion de Cartan sur  $Q(N)$ , dite normale (cf par exemple [9], [15], [18]) (1).

Notre démarche, beaucoup plus proche des travaux de E. Cartan ([2.a]), est plus générale. Elle s'inspire du résultat algébrique suivant:  $E_{p,q}$  étant un espace vectoriel réel de dimension  $m$  strictement supérieure à 2, muni d'une forme quadratique de signature  $(p, q)$ , on considère l'espace vectoriel:  $E_{p+1, q+1} = E_{p,q} \oplus E_{1,1}$ , où  $E_{1,1}$  est un espace vectoriel de dimension 2 muni d'une forme quadratique de type (1,1). Par l'intermédiaire d'une application injective  $\rho$  que nous appelons «transformation isotropique» et qui envoie  $E_{p,q}$  dans le cône isotrope  $C_{p+1, q+1}$  de  $E_{p+1, q+1}$ , on peut associer de façon biunivoque les transformations conformes de  $E_{p,q}$  à des isométries de  $E_{p+1, q+1}$  définies modulo id, c'est-à-dire à des éléments du groupe projectif orthogonal  $PO(p+1, q+1)$ .

$N$  étant une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$ , on considère un fibré vectoriel  $\zeta = (M, \pi, N)$ , de base  $N$  et fibre-type  $E_{p,q}$ . On suppose que  $\zeta$  a pour groupe structural  $CO(p, q)$ , groupe des similitudes de  $E_{p,q}$ , ou de façon équivalente qu'il existe sur  $\zeta$  une classe conforme de métriques pseudo-riemanniennes de type  $(p, q)$ .

A partir du fibré  $\zeta$  nous définissons les fibrés suivants:

- $\zeta_1 = (M_1, \pi_1, N)$ , fibré vectoriel «augmenté» de base  $N$  et fibre-type  $E_{p+1, q+1}$ . Ce fibré  $\zeta_1$  est muni d'une métrique pseudo-riemannienne de type  $(p+1, q+1)$ .
- $\bar{\zeta} = (\bar{M}, \bar{\pi}, N)$ , fibré en quadriques projectives dit fibré «de Möbius». Ses fibres sont les espaces de Möbius définis à partir des fibres correspondantes du fibré  $\zeta_1$ .

La donnée d'une connexion d'Ehresmann conforme sur le fibré  $\bar{\zeta}$  équivaut à la donnée d'une connexion linéaire pseudo-riemannienne  $\nabla$  sur  $\zeta_1$  et entraîne l'existence d'une connexion non-linéaire  $D$  sur  $\zeta$  dite «connexion généralisée conforme». De plus, on peut établir un lien entre  $\nabla$  et  $D$  de la façon suivante:

$g$  étant une métrique quelconque appartenant à la classe conforme sur  $\zeta$ , on définit un  $N$ -morphisme  $\tilde{\rho}_g$  de fibrations différentiables de  $\zeta$  dans  $\zeta_1$  qui envoie les fibres

---

(1) A cette liste, il convient d'ajouter la publication récente de Paul Gauduchon (cf. Bibliographie), où toutes ces notions sont développées selon un point de vue original et nouveau.

de  $\zeta$  dans le cône isotrope des fibres de  $\zeta_1$  correspondantes (par analogie avec le cas algébrique, un tel morphisme est appelé «transformation isotropique»).

Soit  $(x_t)$  un chemin différentiable de  $N$ . Une section  $s$  de  $\zeta$  vérifie:  $D_{\dot{x}_t} s(x_t) = 0$ , si et seulement si il existe un chemin différentiable  $(\lambda_t)$  de  $\mathbf{R}^*$ , qui dépend de  $(x_t)$  et  $s$ , tel que:  $\nabla_{\dot{x}_t} \lambda_t(\tilde{\rho}_g \circ s(x_t)) = 0$ .

On peut donc envisager la notion de connexion conforme selon deux points de vue: soit comme une connexion non-linéaire sur le fibré  $\zeta$ , soit comme une connexion linéaire pseudo-riemannienne sur le fibré vectoriel «augmenté»  $\zeta_1$  (selon une démarche analogue au cas algébrique où on «linéarise» les transformations conformes de  $E_{p,q}$  en considérant des isométries de  $E_{p+1,q+1}$  définies modulo id).

Dans ce contexte, la notion de «connexion de Cartan» apparaît de la façon suivante:  $s_0$  désignant la section nulle de  $\zeta$  ( $\zeta$  étant supposé de rang  $n = \dim N$ ), une connexion généralisée conforme  $D$  sur  $\zeta$  est dite de «Cartan» si  $Ds_0$  définit un  $N$ -isomorphisme de fibrés vectoriels entre le fibré tangent de  $N$  et  $\zeta$ . En considérant la connexion linéaire pseudo-riemannienne  $\nabla$  sur le fibré «augmenté»  $\zeta_1$ , liée à  $D$  par la relation signalée plus haut, nous donnons une définition intrinsèque des «cercles conformes» et des «droites minima» d'E. Cartan ([2,a]), selon une approche basée sur la notion classique de développement des courbes([5]).

Enfin, en guise d'exemple, nous montrons comment on peut interpréter certains résultats connus issus des théories relativistes de l'électromagnétisme en associant à la donnée d'un champ électromagnétique une connexion généralisée conforme sur le fibré tangent de la variété espace-temps. On obtient ainsi une interprétation géométrique du tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique. D'autre part, on peut établir que les trajectoires de certaines particules chargées sont des géodésiques de la connexion considérée. Il nous semble qu'il serait intéressant d'approfondir la géométrie conforme qui sous-tend cet exemple.

Ce travail est issu de la thèse de troisième cycle: «Sur les connexions conformes», réalisée sous la direction de M. Crumeyrolle, professeur à la faculté des Sciences de Toulouse III. Je tiens à le remercier pour l'intérêt qu'il a porté à la lecture de cet article. Je tiens d'autre part à remercier M. Leborgne et M. Hijazi, respectivement professeur et maître de conférences à la faculté des sciences de Nantes, pour les nombreux conseils et suggestions qu'ils ont bien voulu me donner.

**NOTATIONS**

$E_{p,q}$  désigne l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^m$ , muni d'une forme quadratique  $Q_{p,q}$  non dégénérée et de signature  $(p, q)$ . On suppose  $m$  strictement supérieur à 2.  $E_{1,1}$  est un espace vectoriel réel de dimension 2 muni d'une forme quadratique  $Q_{1,1}$  non dégénérée et de signature  $(1,1)$ . On note  $B_{p,q}$  et  $B_{1,1}$  les formes bilinéaires respectivement associées à  $Q_{p,q}$  et  $Q_{1,1}$ .

L'espace vectoriel  $E_{p,q} \oplus E_{1,1}$ , noté  $E_{p+1,q+1}$ , est muni de la forme bilinéaire symétrique  $B_{p+1,q+1}$  définie par:  $B_{p+1,q+1} = B_{p,q} \oplus B_{1,1}$ . La forme quadratique  $Q_{p+1,q+1}$  associée à  $B_{p+1,q+1}$  est non dégénérée et de signature  $(p+1, q+1)$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous omettrons les indices et désignerons les formes bilinéaires et quadratiques considérées par  $B$  et  $Q$  respectivement.

Afin d'éviter les lourdeurs de la notation matricielle, nous donnons certains résultats dans les algèbres de Clifford respectives  $Cl_{p,q}$  et  $Cl_{p+1,q+1}$  de  $E_{p,q}$  et de  $E_{p+1,q+1}$ . Ainsi, on écrit  $y^2$  pour  $Q(y)$  si  $y$  est un vecteur, et on exprime les isométries de  $E_{p+1,q+1}$  par l'intermédiaire de  $\text{Pin}(p+1, q+1)$ , revêtement à deux feuillet du groupe orthogonal  $O(p+1, q+1)$  de  $E_{p+1,q+1}$ . On rappelle que ce revêtement est défini par:

$$\begin{aligned} \text{Pin}(p+1, q+1) &\rightarrow O(p+1, q+1) \\ h &\mapsto (x \mapsto \alpha(h)xh^{-1}) \end{aligned}$$

où  $\alpha$  désigne l'automorphisme principal de  $Cl_{p+1,q+1}$ .

( $\alpha = \text{id}$  sur les éléments pairs de  $Cl_{p+1,q+1}$ ,  $= -\text{id}$  sur les éléments impairs). (Pour plus de détails cf [3]).

On désigne par  $\{e_i\}, i = 1, 2, \dots, m$ , une base orthonormée de  $E_{p,q}$  ( $e_i^2 = 1$  pour  $1 \leq i \leq p, e_i^2 = -1$  pour  $p+1 \leq i \leq m$ ), par  $\{e_0, e_{m+1}\}$  une base orthonormée de  $E_{1,1}$  ( $e_0^2 = 1; e_{m+1}^2 = -1$ ) et par  $\{x_0, x_{0*}\}$  la base de Witt de  $E_{1,1}$  définie par:

$$x_0 = \frac{e_0 + e_{m+1}}{2}; \quad x_{0*} = \frac{e_0 - e_{m+1}}{2}$$

Dans la suite, chaque fois qu'il sera question de différentiabilité, il s'agira, sauf mention contraire, de différentiabilité  $C^\infty$ .

## I. LE GROUPE CONFORME DE $E_{p,q}$

### I.1. Le groupe conforme de $E_{p,q}$

DEFINITION I.1.1. Une application  $f : U \rightarrow E_{p,q}$ , définie sur un ouvert  $U$  de  $E_{p,q}$ , de classe  $C^1$  sur  $U$ , est dite transformation conforme de  $E_{p,q}$  si et seulement si l'application tangente  $T_x f$  est une similitude de  $E_{p,q}$  pour tout élément  $x$  de  $U$ .

EXEMPLE. L'inversion de pôle 0 et de puissance 1 définie sur le complémentaire du cône isotrope de  $E_{p,q}$  par:  $x \mapsto \frac{x}{Q(x)}$ , est une transformation conforme de  $E_{p,q}$ .

On note  $G_{p,q}$  l'ensemble des transformations conformes de  $E_{p,q}$ . Certaines de ces applications n'étant définies que sur des ouverts de  $E_{p,q}$ , on munit  $G_{p,q}$  d'une structure de groupe en procédant de la façon suivante (cf par exemple [1], [12]):

On considère la *quadratique projective*  $\pi(\hat{C}_{p+1,q+1})$ , image par la projection canonique  $\pi : E_{p+1,q+1} - \{0\} \rightarrow P(E_{p+1,q+1})$ , du cône isotrope épointé  $\hat{C}_{p+1,q+1}$ :

de  $E_{p+1,q+1}$ . Cette quadrique projective, notée  $\overline{E}_{p,q}$ , est appelée *espace de Möbius*. Le *groupe projectif orthogonal*  $PO(p+1, q+1)$ , quotient du groupe orthogonal  $O(p+1, q+1)$  de  $E_{p+1,q+1}$  par le groupe  $\{-id, id\}$ , opère sur  $\overline{E}_{p,q}$  de façon transitive et effective. La restriction de ce groupe à  $\overline{E}_{p,q}$ , notée  $K_{p,q}$ , est appelée *groupe de Möbius*.

On montre ensuite que  $G_{p,q}$  s'identifie naturellement au groupe  $K_{p,q}$ . Pour cela on considère en premier lieu une carte locale de  $\overline{E}_{p,q}$  :

Soit  $\bar{z}$  un point de  $\overline{E}_{p,q}$ . On a:  $\bar{z} = \pi(\lambda x_0 + y + \mu x_0)$ , avec  $y \in E_{p,q}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tels que:

$$\lambda\mu + Q(y) = 0$$

Notons par  $\mathcal{U}$  l'ouvert de  $\overline{E}_{p,q}$  défini par les  $\bar{z}$  tels que  $\mu \neq 0$ .

Si  $\bar{z}$  est un point de  $\mathcal{U}$  on a alors:

$$\bar{z} = \pi \circ \rho(y') \quad \text{avec : } y' = -\mu^{-1}y,$$

$\rho$  étant l'application injective de  $E_{p,q}$  dans  $C_{p+1,q+1}$  définie par:

$$(1.1) \quad \rho(y) = Q(y)x_0 + y - x_0.$$

Une telle application est dite «*transformation isotropique*».

L'application  $\varphi$  définie par:  $\varphi = \pi \circ \rho$ , est un homéomorphisme de  $E_{p,q}$  sur  $\mathcal{U}$ . Sa réciproque  $\varphi^{-1}$  est donc une carte locale de  $\overline{E}_{p,q}$ .

REMARQUE. Si  $Q_{p,q}$  est définie, c'est-à-dire si  $p = 0$  ou  $q = 0$ ,  $\overline{E}_{p,q}$  est homéomorphe à la sphère  $S^m$ . La carte locale précédente correspond alors à la projection stéréographique de pôle  $N$  sur  $E_{p,q}$ , le point  $N$  étant défini par:  $\overrightarrow{ON} = e_0$ .

L'action d'un élément  $\overline{\Psi}$  de  $K_{p,q}$  sur l'ouvert de carte  $\mathcal{U}$  «induit» une application  $f : U \rightarrow E_{p,q}$ , définie sur l'ouvert  $U$  de  $E_{p,q}, U = \varphi^{-1}(\overline{\Psi}^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U})$ , par la relation:

$$f = \varphi^{-1} \circ \overline{\Psi} \circ \varphi$$

Montrons que  $f$  est une transformation conforme de  $E_{p,q}$  : Pour tout  $y$  dans  $U$  on a:  $\varphi \circ f(y) = \overline{\Psi} \circ \varphi(y)$ .

Or  $\overline{\Psi}$  est la classe modulo  $\pm id$  d'une isométrie  $\Psi$  de  $E_{p+1,q+1}$ , on a donc:

$$\forall y \in U, \pi \circ \rho \circ f(y) = \pi \circ \Psi \circ \rho(y)$$

D'où l'on déduit:

$$(1.2) \quad \forall y \in U, \rho(f(y)) = \mu_\Psi(y) \cdot \Psi(\rho(y)),$$

où  $\mu_\Psi$  est une fonction de classe  $C^1$  dans  $U$ .

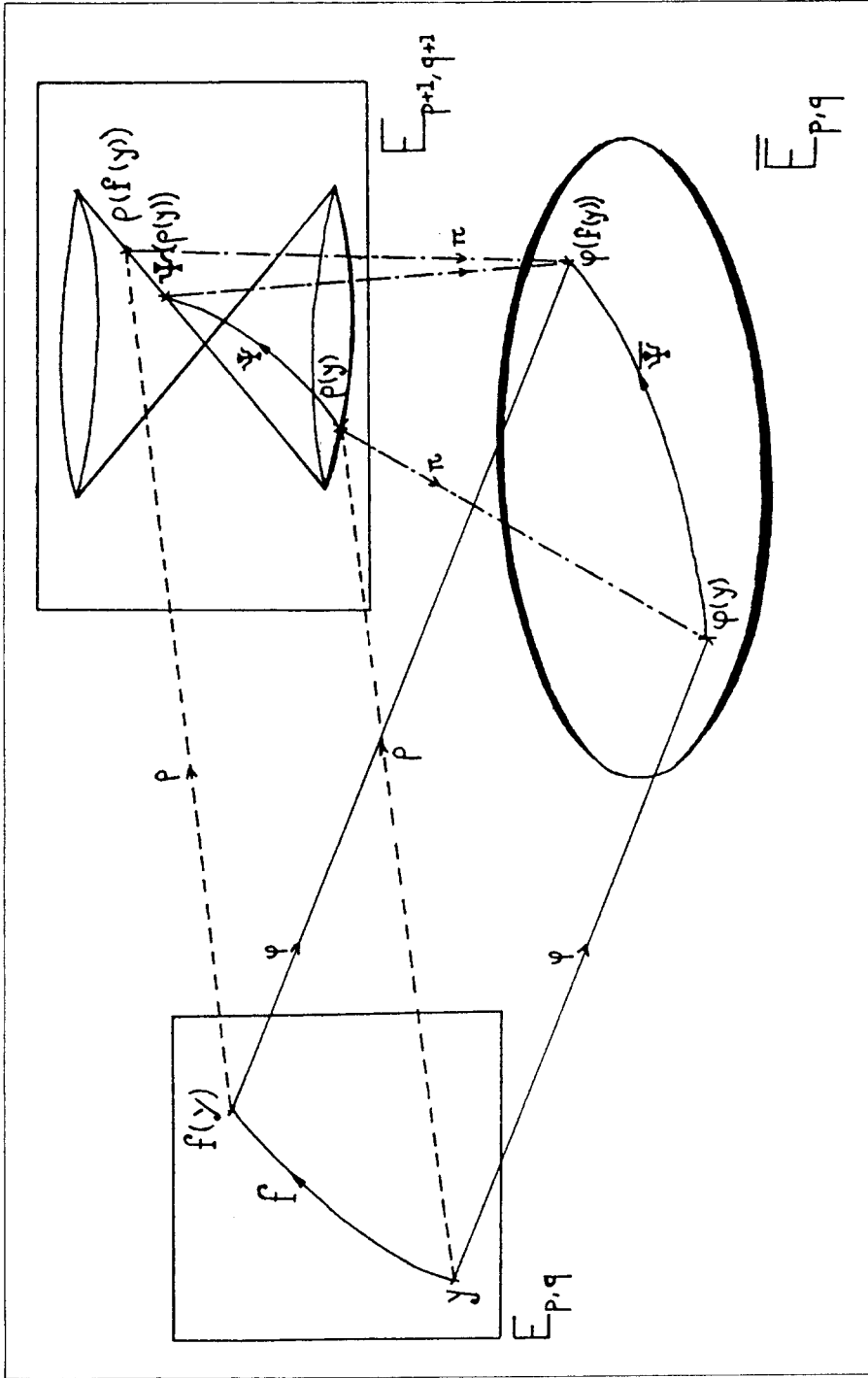


Figure 1

En appliquant (1.2) à un chemin différentiable  $(y_t)$  défini dans  $U$  on obtient par différentiation:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(f(y_t)) &= T_{f(y_t)} \dot{\rho}(f(y_t)) = \dot{\mu}_\Psi(y_t) \cdot \Psi(\rho(y_t)) + \\ &\quad \mu_\Psi(y_t) \cdot (\Psi \circ T_{y_t} \rho) \cdot \dot{y}_t \end{aligned}$$

Le calcul de  $Q_{p+1,q+1}(\dot{\rho}(f(y_t)))$  montre alors que:

$$Q_{p,q}(\dot{\rho}(f(y_t))) = (\mu_\Psi(y_t))^2 Q_{p,q}(\dot{y}_t)$$

L'application  $f$  est donc une transformation conforme de  $E_{p,q}$ .

On peut résumer ce qui précède par le schéma (1) (cf. figure (1)).

On considère alors l'application  $i_0 : K_{p,q} \rightarrow G_{p,q}$ , définie par:  $i_0(\bar{\Psi}) = f$ . Cette application étant bijective, on peut donc identifier  $G_{p,q}$  au groupe de Lie  $K_{p,q}$  (la loi de groupe induite sur  $G_{p,q}$  n'est autre que la composition des applications). Le tableau suivant donne l'expression des éléments de  $K_{p,q}$  associés par  $i_0$  à des éléments notables de  $G_{p,q}$  (cf [1], [12]):

Dans la suite nous serons amenés à considérer un sous-groupe d'isotropie du groupe de Möbius. L'action de ce groupe étant transitive sur  $\bar{E}_{p,q}$ , tous les groupes d'isotropie sont isomorphes: il est donc loisible de considérer le groupe d'isotropie du point de  $\bar{E}_{p,q}$ , qui correspond à l'origine  $O$  de  $E_{p,q}$ , par la carte  $\varphi$  définie plus haut. Ce groupe est donc l'image par la projection canonique  $h : O(p+1, q+1) \rightarrow PO(p+1, q+1)$ , du sous-groupe de  $O(p+1, q+1)$  conservant la droite isotrope  $[x_0]$  de  $E_{p+1,q+1}$ . Nous le noterons  $G_0$ .

## 1.2. CERCLES CONFORMES ET DROITES MINIMA

Nous commençons par donner une définition algébrique des cercles conformes et des droites minima, introduits par E.Cartan dans [2.a]:

DEFINITION I.1.2.

(i) On appelle *cercle conforme* l'intersection:  $\bar{E}_{p,q} \cap P(H), P(H)$  désignant l'espace projectif associé à un sous-espace  $H$  de  $E_{p+1,q+1}$  de la forme:

$H = P_a \oplus [v]$ , où  $P_a$  est un plan artinien de  $E_{p+1,q+1}$  et  $v$  un vecteur non isotrope de  $P_a^\perp$ .

(ii) On appelle *droite minima* de  $\bar{E}_{p,q}$ , tout sous-espace projectif  $P(P_s)$  associé à un plan singulier  $P_s$  de  $E_{p+1,q+1}$ .

La terminologie de «cercle conforme» se justifie par le fait que si la forme quadratique  $Q_{p,q}$  sur  $E_{p,q}$  est définie, les cercles conformes correspondent aux grands cercles de la sphère  $S^m$  selon l'homéomorphisme entre  $\bar{E}_{p,q}$  et  $S^m$ .

<p>Elément de <math>PO(p + 1, q + 1)</math> défini par la classe modulo <math>\pm \text{id}</math> de l'isométrie <math>\Psi</math> de <math>E_{p+1, q+1} : \Psi(z) = \alpha(h) z h^{-1}</math>, où <math>h \in \text{Pin}(p + 1, q + 1)</math></p>	<p>Transformation conforme de <math>E_{p, q}</math> lui correspondant par l'isomorphisme <math>i_0</math> (Expression dans <math>Cl_{p, q}</math>)</p>	<p><math>\mu_\Psi(y)</math></p>
<p><math>\psi = j_0(f)</math> où <math>j_0</math> est l'injection canonique <math>O(p, q) \rightarrow O(p + 1, q + 1)</math></p>	<p><math>f \in O(p, q)</math></p>	<p>1</p>
<p><math>h = \exp(x_0 a) = 1 + x_0 a</math> où <math>a \in E_{p, q}</math> (exp désigne l'application exponentielle de <math>Cl_{p+1, q+1}</math>)</p>	<p><math>y \rightarrow y + a</math> Translation de vecteur a</p>	<p>1</p>
<p><math>h = \exp\left(\frac{1}{2} \eta e_0 e_{m+1}\right)</math> avec <math>\eta \in \mathbb{R}^*</math></p>	<p><math>y \rightarrow \lambda y, \lambda = \exp(-\eta)</math> Homothétie positive de <math>E_{p, q}</math></p>	<p><math>\lambda</math></p>
<p><math>h = e_0</math></p>	<p><math>y \rightarrow \frac{y}{y^2}</math>; inversion de pole 0 de puissance 1 définie pour <math>y^2 \neq 0</math></p>	<p><math>y^{-2}</math></p>
<p><math>h = \exp(ax_0 \cdot) = 1 + ax_0 \cdot</math></p>	<p><math>y \rightarrow y(1 + ay)^{-1}</math> que l'on peut aussi écrire <math>y \rightarrow \frac{y + y^2 a}{1 + 2B(a, y) + a^2 y^2}</math>. C'est une «transformation conforme spéciale» définie pour: <math>1 + 2B(a, y) + a^2 y^2 \neq 0</math></p>	<p><math>(1 + 2B(a, y) + a^2 y^2)^{-1}</math></p>



La proposition qui suit donne une caractérisation différentielle des chemins paramétrés de  $E_{p,q}$  dont l'image est sur un cercle conforme (resp. sur une droite minima). Par abus ces chemins seront appelés cercles conformes (resp. droites minima).

PROPOSITION I.2.1.

(i) Pour qu'un chemin différentiable  $(\eta_t)$  de  $\overline{E}_{p,q}$ , simple et régulier, défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , soit un cercle conforme (resp. une droite minima), il faut et il suffit que l'on ait:

$$\eta_t = \pi(z_t)$$

où  $(z_t)$  est un chemin différentiable de  $E_{p+1,q+1}$  défini sur  $I$ , vérifiant en tout point les trois conditions suivantes:

$$(1.3) \left\{ \begin{array}{ll} \text{i) } Q_{p+1,q+1}(z_t) = 0 & \\ \text{ii) } \frac{d^3}{d\tau^3}(z_t) = 0 & (\text{resp. } \frac{d^2}{d\tau^2}(z_t) = 0) \\ (\tau \text{ étant un paramètre convenable sur la courbe}) & \\ \text{iii) } Q_{p+1,q+1}(\dot{z}_t) \neq 0 & (\text{resp. } Q_{p+1,q+1}(\dot{z}_t) = 0) \end{array} \right.$$

■

Supposons par exemple que l'image du chemin  $(\eta_t)$  soit le cercle conforme:  $\overline{E}_{p,q} \cap P(H)$ ,  $P(H)$  étant le sous-espace projectif associé à:  $H = P_a \oplus [v]$ , où  $P_a$  est un plan artinien de  $E_{p+1,q+1}$  et  $v$  un vecteur non isotrope de  $P_a^\perp$ .

Soit  $\{x'_0, x'_{0\cdot}\}$  une base de Witt de  $P_a$ .

Les hypothèses faites sur le chemin  $(\eta_t)$  permettent de définir un changement de paramètre  $t \rightarrow \tau(t)$  tel que tout point de  $(\eta_t)$  s'écrive:

$$\eta_t = \pi(\tau(t)^2 v^2 x'_0 + \tau(t)v - x'_{0\cdot})$$

(On peut faire tendre  $|\tau(t)|$  vers l'infini et obtenir ainsi le point  $\overline{x}_0$ ).

Le chemin  $(z_t)$  de  $E_{p+1,q+1}$  défini par:  $z_t = \tau(t)^2 v^2 x'_0 + \tau(t)v - x'_{0\cdot}$ , vérifie les trois conditions (1.3).

Inversement supposons qu'il existe un chemin  $(z_t)$  de  $E_{p+1,q+1}$  défini sur  $I$ , vérifiant les trois conditions (1.3) de la proposition précédente.

On a alors:  $z_t = \frac{\tau^2}{2} v_1 + \tau v_2 + v_3$ , où  $(v_1, v_2, v_3)$  sont des vecteurs constants de  $E_{p+1,q+1}$  tels que:

$$v_1^2 = v_3^2 = B(v_1, v_2) = B(v_2, v_3) = 0,$$

$$B(v_1, v_3) + v_2^2 = 0 \text{ et } v_2^2 \neq 0$$

L'image du chemin  $(\eta_t)$  défini par:  $\eta_t = \pi(z_t) = \pi\left(\frac{1}{2}\tau(t)^2 v_1 + \tau(t)v_2 + v_3\right)$  est donc sur le cercle conforme:

$$\overline{E}_{p,q} \cap P(\{v_1, v_3\} \oplus \{v_2\})$$

Le cas des droites minima est analogue.

## II. CONNEXIONS CONFORMES SUR UN FIBRÉ VECTORIEL

### II.1. Préliminaires

Dans ce chapitre,  $N$  désigne une variété différentielle  $C^\infty$ , de dimension  $n$ , paracompacte.

Nous utilisons par ailleurs les notions suivantes: (cf [4], [5], [16]).

Soit  $\zeta = (M, \pi, N, F, G)$  un fibré de base  $N$ , projection  $\pi$ , fibre-type  $F$  et groupe structural  $G$ . Si l'action de  $G$  sur  $F$  est effective,  $\zeta$  est le fibré de fibre-type  $F$  associé à un fibré principal  $P_\zeta$ , que nous appellerons fibré principal des repères de  $\zeta$ .

On appelle  $G$ -connexion d'Ehresmann sur  $\zeta$  toute connexion associée à une connexion principale sur  $P_\zeta$ .

Une telle connexion définit un transport parallèle dans  $M$  le long des chemins de  $N$  de la façon suivante:

Soit  $\gamma = (x_t)$  un chemin de  $N$  défini sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$  de  $\mathbf{R}$ .

Soit  $p_0$  un point de la fibre de  $P_\zeta$  au-dessus de  $x_{t_0}$  et  $(p_t)$  le relèvement horizontal de  $\gamma$  dans  $P_\zeta$  issu de  $p_0$ . Le transport parallèle  $\tau_\gamma$  le long de  $\gamma$  dans  $M$  est alors défini par:

$$(2.1) \quad \tau_\gamma = p_t \circ p_0^{-1}$$

où l'on a fait la convention suivante: Pour tout élément  $p$  de  $P_\zeta$  de projection  $x$  sur  $N$ , on note également  $p$  (par abus) le difféomorphisme de  $F$  sur la fibre de  $M$  en  $x$  défini par:  $p: F \rightarrow M_x; f \rightarrow (\overline{p}, f)$

Pour  $F = E_{p+1, q+1}$ ,  $G = O(p+1, q+1)$ , ces connexions sont dites *pseudo-riemanniennes*; pour  $F = P(E_{p+1, q+1})$ ,  $G = PO(p+1, q+1)$ , *projectives-orthogonales*; pour  $F = \overline{E}_{p,q}$ ,  $G = K_{p,q}$ , *conformes*.

Nous serons d'autre part amenés à utiliser la notion suivante, introduite par Greub, Halperin, Vanstone dans [7. b] (on rappelle que si  $\zeta = (M, \pi, N)$  est un fibré vectoriel, il existe un morphisme canonique de fibrés vectoriels  $\alpha_M: V(M) \rightarrow M$ , induit par l'identification entre la fibre  $M_x$  et l'espace tangent  $T_y(M_x)$  en un point  $y$  de  $M_x$ ):

DEFINITION II.1.1. Soit  $\zeta = (M, \pi, N)$  un fibré vectoriel, soit  $H(M)$  un sous-fibré horizontal de  $T(M)$  et soit  $K_M$  la projection de  $T(M)$  sur le fibré vertical  $V(M)$ , définie par la donnée de  $H(M)$ . On appelle connexion généralisée sur  $\zeta$  associée à  $H(M)$ , l'application  $D : \mathcal{S}(\zeta) \rightarrow \wedge^1((N, \zeta)(\mathcal{S}(\zeta))$  désignant le module des sections de  $\zeta$  et  $\wedge^1(N, \zeta)$  le module des 1-formes sur  $N$  à valeurs dans  $\zeta$ ), définie par:

$$(2.2) \quad Ds = \alpha_M \circ K_M \circ Ts, \quad s \in \mathcal{S}(\zeta)$$

Cette définition généralise en effet la notion de connexion linéaire sur un fibré vectoriel. On remarquera de plus qu'aucune hypothèse n'est faite sur la possibilité de relever tout chemin de la base  $N$  en un chemin horizontal de  $M$ .

## II.2. Connexions conformes sur un fibré vectoriel

### II.2.1. Introduction

Soit  $\zeta = (M, \pi, N)$  un fibré vectoriel de fibre-type  $E_{p,q}$  au-dessus d'une variété  $N$  de dimension  $n$ . On suppose que ce fibré a pour groupe structural  $CO(p, q)$  ou de façon équivalente qu'il existe sur  $\zeta$  une classe conforme de métriques pseudo-riemanniennes de type  $(p, q)$ . Nous noterons cette classe par  $[g_{p,q}]$ . Dans la suite nous désignerons par  $\#g$  le  $N$ -isomorphisme de fibrés vectoriels:  $\zeta^* \rightarrow \zeta$ , induit par le choix d'un élément  $g$  de  $[g_{p,q}]$  et par  $b_g$  le  $N$ -isomorphisme réciproque.

Nous allons suivre une démarche analogue à celle développée dans le §1.1. Nous commençons par définir un fibré vectoriel «augmenté»  $\zeta_1$ . Pour cela on associe à  $P$ , fibré principal des repères de  $\zeta$ , le fibré principal:

$$P_1 = P \times_{CO(p,q)} O(p+1, q+1),$$

le groupe  $CO(p, q)$  opérant à gauche sur  $O(p+1, q+1)$  par l'intermédiaire de l'homomorphisme de groupe  $j$  défini par:

$$\begin{array}{lcl}
 j : CO(p, q) \rightarrow O(p+1, q+1) & & \\
 f \quad \hookrightarrow \quad j(f) : & E_{p+1, q+1} \rightarrow E_{p+1, q+1} & \\
 & x_0 \hookrightarrow pr_1(f)x_0 & \\
 & e_i \hookrightarrow pr_2(f)e_i & \\
 & x_{0\cdot} \hookrightarrow (pr_1(f))^{-1}x_0. &
 \end{array}$$

( $pr_1$  et  $pr_2$  sont les projections canoniques:  $pr_1 : CO(p, q) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ;  $pr_2 : CO(p, q) \rightarrow O(p, q)$ ).

On désignera par  $\tilde{j}$  le morphisme de fibrations principales:  $\tilde{j} : P \rightarrow P_1; p \hookrightarrow [p, e]$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $O(p+1, q+1)$ .

Le fibré vectoriel «augmenté»  $\zeta_1 = (M_1, \pi_1, N)$  est alors le fibré de fibre-type  $E_{p+1, q+1}$  associé à  $P_1$ . De façon canonique (en «transportant» la forme bilinéaire

$B_{p+1,q+1}$  de  $E_{p+1,q+1}$  sur les fibres), on munit  $\zeta_1$  d'une métrique de type  $(p+1, q+1)$ , que nous noterons  $g_{p+1,q+1}$ .

A tout élément  $g$  de  $[g_{p,q}]$ , on associe un  $N$ -morphisme de fibrations  $\tilde{\rho}_g : \zeta \rightarrow \zeta_1$ , défini à partir de la transformation isotropique  $\rho : E_{p,q} \rightarrow E_{p+1,q+1}$ , introduite dans le §1.1. (cf (1.1)). On procède de la façon suivante:

Le choix d'un élément  $g$  de  $[g_{p,q}]$  conduit à la réduction du fibré principal  $P$  à un sous-fibré  $Q$  de groupe structural  $O(p, q)$ . On a donc:

$$\forall y_x \in M_x, y_x = q_x \cdot y, q_x \in Q_x, y \in E_{p,q}$$

Posons:

$$(2.3) \quad \tilde{\rho}_g(y_x) = \tilde{j}(q_x) \cdot \rho(y)$$

Les résultats du §1.1. montrent que le deuxième membre de l'égalité (2.3) ne dépend pas du choix de  $q_x$  dans  $Q_x$ . Par définition l'application  $\tilde{\rho}_g : M \rightarrow M_1$ , ainsi obtenue est un  $N$ -morphisme  $C^\infty$  qui envoie les fibres de  $\zeta$  dans le cône isotrope des fibres de  $\zeta_1$  correspondantes. Par analogie avec le cas algébrique, un tel morphisme sera appelé «*transformation isotropique*».

REMARQUE. Si  $g'$  est un autre élément de  $[g_{p,q}]$ , il existe une fonction  $\mu$  strictement positive sur  $N$  telle que:  $g' = \mu^2 g$ . On vérifie alors que:

$$(2.4) \quad \tilde{\rho}_{g'} = \mu \cdot \tilde{\rho}_g$$

Au fibré vectoriel  $\zeta_1$  est associé le fibré projectif  $P(\zeta_1) = (P(M_1), \overline{\pi}_1, N)$ .

Dans la suite, nous identifierons  $P(\zeta_1)$  au fibré de fibre-type  $P(E_{p+1,q+1})$  associé au fibré principal  $\overline{P}_1$  défini par:

$$\overline{P}_1 = P_1 \times_{O(p+1,q+1)} PO(p+1, q+1),$$

le groupe  $O(p+1, q+1)$  opérant à gauche sur  $PO(p+1, q+1)$  par l'intermédiaire de la projection canonique  $h : O(p+1, q+1) \rightarrow PO(p+1, q+1)$ . (On désignera par  $\tilde{h}$  le morphisme de fibrations principales:  $\tilde{h} : P_1 \rightarrow \overline{P}_1; p_1 \mapsto [p_1, h(e)]$ ).

On note  $\tilde{\pi}$  le  $N$ -morphisme canonique:  $\tilde{\pi} : \zeta_1 \rightarrow P(\zeta_1); \zeta_1$  désignant le fibré  $(\dot{M}_1, \dot{\pi}_1, N)$  défini par:

$$\dot{M}_1 = \bigcup_{x \in N} (\dot{M}_1)_x \quad \text{avec} \quad (\dot{M}_1)_x = (M_1)_x - \{0\}$$

Enfin nous introduisons un fibré en quadriques projectives  $\overline{\zeta}$ , dit fibré «*de Möbius*» associé à  $\zeta : \overline{\zeta} = (\overline{M}, \overline{\pi}, N)$  est le fibré de fibre-type  $\overline{E}_{p,q}$  associé à  $\overline{P}_1$ .

On peut identifier les fibres de  $\bar{\zeta}$  et les espaces de Möbius définis à partir des fibres correspondantes de  $\zeta_1$ .

A partir du difféomorphisme local  $\varphi : E_{p,q} \rightarrow \bar{E}_{p,q}$ , introduit dans le paragraphe I.1., on définit un  $N$ -morphisme  $\bar{\varphi} : \zeta \rightarrow \bar{\zeta}$ , en procédant de la façon suivante:

$$\forall y_x \in M_x, y_x = p_x \cdot y, p_x \in P_x, y \in E_{p,q}$$

*Posons.*

$$(2.5) \quad \bar{\varphi}(y_x) = \bar{h} \circ \bar{j}(p_x) \cdot \varphi(y)$$

D'après les résultats du paragraphe I.1., le deuxième membre de l'égalité (2.5) ne dépend pas du choix de  $p_x$  dans  $P_x$ .

L'application  $\bar{\varphi} : M \rightarrow \bar{M}$ , ainsi obtenue est un  $N$ -morphisme  $C^\infty$  du fibré  $\zeta$  dans le fibré  $\bar{\zeta}$ . Par définition, c'est de plus un *difféomorphisme local*.

$\bar{i}$  désignant le  $N$ -morphisme de  $\bar{\zeta}$  dans  $P(\zeta_1)$  défini par les inclusions:  $\bar{M}_x \subset [P(M_1)]_x, \forall x \in N$ , on peut résumer ce qui précède par le schéma suivant:

$$(2.6) \quad \begin{array}{ccc} M_1 & \supset & \bar{M}_1 & \xrightarrow{\bar{\pi}} & P(M_1) \\ & & \bar{\rho}_g \uparrow & & \uparrow \bar{i} \\ & & M & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \bar{M} \end{array}$$

avec:  $\bar{\pi} \circ \bar{\rho}_g = \bar{i} \circ \bar{\varphi}, \forall g \in [g_{p,q}]$ .

**II.2.2. Connexions généralisées conformes sur un fibré vectoriel**

DEFINITION II.2.1. Soit  $\zeta = (M, \pi, N, E_{p,q})$  un fibré vectoriel de fibre-type  $E_{p,q}$  et de groupe structural  $CO(p, q)$ .

Soit  $\bar{\zeta} = (\bar{M}, \bar{\pi}, N, \bar{E}_{p,q})$  le fibré «de Möbius» associé à  $\zeta$ .

Une connexion généralisée  $D$  sur  $\zeta$ , associée à un sous-fibré horizontal  $H(M)$  de  $T(M)$ , est dite conforme s'il existe une connexion d'Ehresmann conforme  $H(\bar{M})$  sur  $\bar{\zeta}$  telle que:

$$\bar{\varphi}_*(H(M)) = H(\bar{M}) \cap \bar{\varphi}_*(T(M))$$

où  $\bar{\varphi}$  est le morphisme de fibrations différentiables de  $\zeta$  dans  $\bar{\zeta}$  défini en (2.5).

La proposition suivante permet de caractériser ces connexions:

PROPOSITION II.2.1. Soit  $\zeta = (M, \pi, N, E_{p,q})$  un fibré vectoriel de fibre-type  $E_{p,q}$  et de groupe structural  $CO(p, q)$ .

Soit  $\zeta_1 = (M_1, \pi_1, N, E_{p+1,q+1})$  le fibré vectoriel «augmenté» associé de  $\zeta$ .

A toute connexion généralisée conforme  $D$  sur  $\zeta$  correspond de façon biunivoque une connexion linéaire pseudo-riemannienne  $\nabla$  sur le fibré  $\zeta_1$ , telle que:

( $x_t$ ) étant un chemin différentiable de  $N$  défini sur un compact  $J$  de  $\mathbf{R}$  et  $s$  une section de  $\zeta$ , on a:  $D_{\dot{x}_t} s(x_t) = 0$  si et seulement si il existe un chemin différentiable  $t \rightarrow \lambda_t, J \rightarrow \mathbf{R}^*$ , tel que:

$$(2.7) \quad \nabla_{\dot{x}_t} (\lambda_t \cdot \tilde{\rho}_g \circ s(x_t)) = 0$$

$\tilde{\rho}_g$  étant la transformation isotropique de  $M$  dans  $M_1$  associée à une métrique quelconque  $g$  de la classe conforme sur  $\zeta$ .

DÉMONSTRATION. Cela revient à démontrer que toute connexion d'Ehresmann conforme sur le fibré de Möbius  $\bar{\zeta}$  associé à  $\zeta$  est associée de façon biunivoque à une connexion pseudo-riemannienne sur  $\zeta_1$ . Ceci résulte de ce que toute connexion principale de forme  $\nu$  sur  $P_1$  correspond de façon biunivoque à une connexion principale de forme  $\bar{\omega}$  sur  $\bar{P}_1$  par la relation:

$$\nu = (T_c h)^{-1} \cdot \bar{h}^* \bar{\omega}$$

Ainsi toute connexion généralisée conforme  $D$  sur  $\zeta$  correspond de façon biunivoque à une connexion linéaire pseudo-riemannienne sur  $\zeta_1$ .

Montrons maintenant que  $\nabla$  et  $D$  sont liées par l'équivalence définie en (2.7). Revenons au diagramme (2.6). Il existe sur  $P(\zeta_1)$  une connexion d'Ehresmann projective-orthogonale  $H(P(M_1))$  associée à la connexion principale de forme  $\bar{\omega}$  sur  $\bar{P}_1$ .

Soit  $\gamma : t \rightarrow x_t$  un chemin différentiable de  $N$  défini sur un intervalle compact  $J$  de  $\mathbf{R}$ . Notons:

$\tau_\gamma$  le transport parallèle de  $\gamma$  dans  $M_1$  associé à la connexion  $\nabla$ ,  
 $\tau_\gamma$  le transport parallèle de  $\gamma$  dans  $P(M_1)$  associé à la connexion  $H(P(M_1))$ ,  
 $\bar{\tau}_\gamma$  le transport parallèle de  $\gamma$  dans  $\bar{M}$  associé à la connexion  $H(\bar{M})$   
 qui définit  $D$ .

$$(2.8) \quad \text{On a:} \quad \bar{\iota} \circ \bar{\tau}_\gamma = \tilde{\tau}_\gamma \circ \bar{\iota}$$

$$(2.9) \quad \text{et:} \quad \bar{\pi} \circ \tau_\gamma = \tilde{\tau}_\gamma \circ \bar{\pi} \quad (\text{sur } \bar{M}_1)$$

Soit  $s$  une section de  $\zeta$ .

Supposons qu'il existe un chemin différentiable  $t \rightarrow \lambda_t, J \rightarrow \mathbf{R}^*$  tel que:

$$\nabla_{\dot{x}_t} (\lambda_t \tilde{\rho}_g \circ s(x_t)) = 0$$

Pour tout  $t_0 \in J$  on a donc:  $\lambda_t \cdot \tilde{\rho}_g \circ s(x_t) = \tau_\gamma (\lambda_{t_0} \cdot \tilde{\rho}_g \circ s(x_{t_0}))$

Donc, d'après (2.9):  $\bar{\pi} \circ \bar{\rho}_g \circ s(x_t) = \bar{\tau}_\gamma \circ \bar{\pi} \circ \bar{\rho}_g \circ s(x_{t_0})$

On a:  $\bar{\pi} \circ \bar{\rho}_g = \bar{i} \circ \bar{\varphi}$ , d'où:  $\bar{i} \circ \bar{\varphi} \circ s(x_t) = \bar{i} \circ \bar{\tau}_t \circ \bar{\varphi} \circ s(x_{t_0})$ , d'après (2.8).

Donc:  $\bar{\varphi} \circ s(x_t) = \bar{\tau}_\gamma \circ \bar{\varphi} \circ s(x_{t_0})$

Le chemin  $(\bar{\varphi} \circ s(x_t))$  est horizontal relativement à  $H(\bar{M})$  ce qui, par définition, entraîne que:  $D_{\dot{x}_t} s(x_t) = 0$

Inversement supposons que l'on ait:  $D_{\dot{x}_t} s(x_t) = 0$

Par définition, le chemin  $(\bar{\varphi} \circ s(x_t))$  est horizontal relativement à  $H(\bar{M})$ . On a donc:  $\bar{\varphi} \circ s(x_t) = \bar{\tau}_\gamma \circ \bar{\varphi} \circ s(x_{t_0}) \Rightarrow \bar{i} \circ \bar{\varphi} \circ s(x_t) = \bar{\tau}_\gamma \circ \bar{i} \circ \bar{\varphi} \circ s(x_{t_0}) \Rightarrow \bar{\pi} \circ \bar{\rho}_g \circ s(x_t) = \bar{\pi} \circ \bar{\tau}_\gamma \circ \bar{\rho}_g \circ s(x_{t_0})$

D'où l'on déduit l'existence d'un chemin différentiable  $(t \rightarrow \lambda_t J \rightarrow \mathbf{R}^*)$  tel que le chemin  $(\lambda_t \bar{\rho}_g \circ s(x_t))$  soit horizontal relativement à  $\nabla$ .

On a donc:  $\nabla_{\dot{x}_t} (\lambda_t \cdot \bar{\rho}_g \circ s(x_t)) = 0$  ■

Remarquons que si  $g' = \mu^2 g$  est un autre élément de  $[g_{p,q}]$ , alors  $\bar{\rho}_{g'} = \mu \cdot \bar{\rho}_g$  (cf 2.4) et on a:

$$\nabla_{\dot{x}_t} (\lambda_t \cdot \bar{\rho}_g \circ s(x_t)) = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{x}_t} (\alpha_t \cdot \bar{\rho}_g \circ s(x_t)) = 0$$

avec  $\alpha_t = \mu(x_t)^{-1} \cdot \lambda_t$ .

Dans l'équivalence définie en (2.7) on peut donc utiliser la transformation isotropique associée à n'importe quelle métrique  $g$  de classe conforme sur  $\zeta$ .

La proposition II.2.1. permet de définir l'expression de  $Ds$  pour  $s \in \mathcal{S}(\zeta)$ .

Soit  $(U_\alpha)$  un recouvrement ouvert de  $N$  définissant un atlas trivialisant de  $P$  et  $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow P$  des sections locales de ce fibré. Les  $\phi_\alpha = \bar{j} \circ \psi_\alpha$  définissent des sections locales de  $P_1$ .

Soit  $\{s_i\}, i = 1, 2 \dots m$ , le repère mobile de  $\zeta$  défini sur  $U_\alpha$  par:

$$s_i(x) = \psi_\alpha(x) \cdot e_i.$$

Soit  $\{X_0, S_i, X_{0\cdot}\}, i = 1, 2, \dots, m$ , le repère mobile de  $\zeta_1$  défini sur  $U_\alpha$  par:

$$X_0(x) = \phi_\alpha(x) \cdot x_0$$

$$S_i(x) = \phi_\alpha(x) \cdot e_i$$

$$X_{0\cdot}(x) = \phi_\alpha(x) \cdot x_{0\cdot}$$

Soit  $\nu$  la matrice de connexion de  $\nabla$  dans ce repère mobile. Comme  $\nabla g_{p+1,q+1} = 0$ , ses composantes vérifient:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \nu_0^0 + \nu_0^{0\cdot} &= 0 & \nu_i^0 &= -2 b_{ik} \nu_0^k \\ \nu_0^{0\cdot} + \nu_0^0 &= 0 & \nu_i^{0\cdot} &= -2 b_{ik} \nu_0^k \\ \nu_j^i b_{ik} + b_{ji} \nu_k^i &= 0 & \text{avec } b_{ij} &= B(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Soit  $s \in \mathcal{S}(\zeta)$  telle que  $D_{\dot{x}_t} s(x_t) = 0$ , où  $(x_t)$  est un chemin de  $N$  défini sur un compact  $J$  de  $\mathbb{R}$ . Il existe donc un chemin différentiable  $(\lambda_t)$  de  $\mathbb{R}^*$ , défini sur  $J$  tel que  $\nabla_{\dot{x}_t}(\lambda_t \cdot \bar{\rho}_g \circ s(x_t)) = 0$ .

Si  $s = y^i s_i$  est l'expression locale de  $s$  dans le repère mobile  $\{s_i\}$  on a:  $\lambda_t \cdot \bar{\rho}_g \circ s(x_t) = \mu_t(y^2(t)X_0 + y^i(t)S_i - X_{0\cdot})$  dans le repère mobile  $\{X_0, S_i, X_{0\cdot}\}$  de  $\zeta_1$ , avec:  $y^i(t) = y^i(x_t)$ ,  $y^2(t) = Q(y^i(t)e_i)$ ,  $(\mu_t)$  étant un chemin de  $\mathbb{R}^*$  défini sur  $J$ .

Développons donc:  $\nabla_{\dot{x}_t} \mu_t(y^2(t)X_0 + y^i(t)S_i - X_{0\cdot}) = 0$ .

On obtient le système suivant (où on écrit  $\nu_\beta^a(\dot{x}_t) = \nu_\beta^a(t)$  pour simplifier):

$$(2.11) \quad \dot{\mu}_t y^2(t) + \mu_t(dy^2(\dot{x}_t) + y^2(t)\nu_0^0(t) + \nu_j^0(t)y^j(t)) = 0$$

$$(2.12) \quad \dot{\mu}_t y^i(t) + \mu_t(y^2(t)\nu_0^i(t) - \nu_0^i(t) + dy^i(\dot{x}_t) + \nu_j^i(t)y^j(t)) = 0$$

$$(2.13) \quad -\dot{\mu}_t + \mu_t(\nu_0^0(t) - \nu_j^0(t)y^j(t)) = 0$$

(2.13) donne  $\mu_t^{-1} \cdot \dot{\mu}_t$ .

De (2.12) et (2.13), on déduit compte tenu des relations (2.10):

$$(2.14) \quad dy^i(\dot{x}_t) + \omega^i(\dot{x}_t) + \omega_j^i(\dot{x}_t)y^j(t) + \omega_j^0(\dot{x}_t) \left( \frac{1}{2} b^{ji} y^2(t) - y^j(t)y^i(t) \right) = 0$$

où on a posé:  $\omega^i = -\nu_0^i$ ;  $\omega_j^i = \nu_j^i + \nu_0^0 \delta_j^i$ ;  $\omega_j^0 = -\nu_j^0$ .

Le premier membre de l'égalité (2.14) est l'expression locale des composantes de  $(D_{\dot{x}_t} s(x_t))$  dans le repère mobile  $\{s_i\}$ .

Quant à l'équation (2.11), elle est toujours vérifiée si on a (2.12) et (2.13); dans ce cas elle s'obtient à partir de l'égalité:

$$0 = \left( \nabla_{\dot{x}_t} g_{p+1, q+1} \right) (S(t), S(t)), \text{ avec : } S(t) = y^i(t)S_i(t)$$

Si l'on se place sur  $U_\alpha \cap U_\beta$  et si l'on considère le repère mobile  $\{s'_i\}$  de  $\zeta$  défini par:  $s'_i(x) = \psi_\beta(x) \cdot e_i$ , ainsi que le repère mobile  $\{X'_0, S'_i, X'_{0\cdot}\}$  de  $\zeta_1$  défini par:  $X'_0 = \phi_\beta(X) \cdot X_0$ ,  $S'_i = \phi_\beta(x) \cdot e_i$ ,  $X'_{0\cdot} = \phi_\beta(x) \cdot x_{0\cdot}$ , les formules de transformation des composantes de la matrice de connexion de  $\nabla$  montrent que:

- Les  $(\omega^i)$  définissent une 1-forme  $\theta$  sur  $N$  à valeurs dans le fibré  $\zeta$ , soit un élément de  $\Lambda^1(N, \zeta)$ .

- Les  $(\omega_j^0)$  définissent un élément  $\eta$  de  $\Lambda^1(N, \zeta^*)$ .

- Les  $(\omega_j^i)$  définissent une connexion linéaire  $\nabla^M$  sur  $\zeta$  vérifiant:  $\nabla^M g = \omega_g \otimes g$ ,  $\omega_g \in \Lambda^1(N)$ , pour toute métrique  $g$  de  $\{g_{p,q}\}$ .

Par ailleurs l'expression:  $b^{ij} y^2(t)$ , est égale à:  $g^{ij} g(s(x_t), s(x_t))$ , avec  $g_{ij} = g(s_i, s_j)$ ,  $g$  étant une métrique quelconque de  $\{g_{p,q}\}$ . On est alors conduit au résultat suivant, qui donne une définition intrinsèque des connexions généralisées conformes:



PROPOSITION II.2.2. Soit  $\zeta = (M, \pi, N, E_{p,q})$  un fibré vectoriel muni d'une classe conforme de métriques pseudo-riemanniennes  $[g_{p,q}]$ .

Une connexion généralisée conforme sur  $\zeta$  est une application  $D : \mathcal{S}(\zeta) \rightarrow \Lambda^1(N, \zeta)$ , définie par:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} D_x s &= \theta(X) + \nabla_X^M s + \frac{1}{2} \#_g(\eta(X))g(s, s) - \langle \eta(X), s \rangle s; \\ T &\in T(N), s \in \mathcal{S}(\zeta) \end{aligned}$$

$g$  étant une métrique quelconque de  $[g_{p,q}]$ ,  $\theta$  un élément de  $\Lambda^1(N, \zeta)$ ,  $\eta$  un élément de  $\Lambda^1(N, \zeta^*)$  et  $\nabla^M$  une connexion linéaire sur  $\zeta$  vérifiant:  $\nabla^M g' = \omega_{g'} \otimes g'$ ,  $\omega_{g'} \in \Lambda^1(N)$ , pour toute métrique  $g'$  de  $[g_{p,q}]$ . ■

Désormais nous écrivons:  $D = (\theta, \nabla^M, \eta)$  ou plus simplement,  $D = (\theta, \nabla, \eta)$ .

### II.2.3. Courbure d'une connexion généralisée conforme

Soit  $D = (\theta, \nabla, \eta)$  une connexion généralisée conforme sur un fibré vectoriel  $\zeta = (M, \pi, N, E_{p,q}, [g_{p,q}])$ .

Soit  $\Gamma$  le morphisme horizontal de  $\zeta$  associé à  $D$ ; c'est le morphisme de fibrés vectoriels de  $\pi^*(T(N))$  dans  $T(M)$  défini par:

$$(2.16) \quad \Gamma_{s(x)} = (T_x s) - (\alpha_M)_{s(x)}^{-1} \circ (Ds)_x, x \in N, s \in \mathcal{S}(\zeta)$$

(On rappelle que  $\alpha_M$  désigne le morphisme canonique de fibrés vectoriels  $V(M) \rightarrow M$ ).

On définit la courbure de la connexion généralisée  $D$  en considérant l'application:  $\Omega : \mathcal{S}(\zeta) \rightarrow \Lambda^2(N, \zeta)$ , définie par:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \Omega(X, Y).s &= \alpha_M(\Gamma_s([X, Y]) - [\Gamma_s(X), \Gamma_s(Y)]), \\ s &\in \mathcal{S}(\zeta), X, Y \in T(N) \end{aligned}$$

(cf [8], [13]).

Un calcul local montre que:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \Omega(X, Y).s &= \Theta(X, Y) + K(X, Y).s + \frac{1}{2} \#_g(H(X, Y))g(s, s) - \\ &\langle H(X, Y), s \rangle s, s \in \mathcal{S}(\zeta), X, Y \in T(N) \end{aligned}$$

où: •  $\Theta \in \Lambda^2(N, \zeta)$  est définie par:

$$(2.19) \quad \Theta(X, Y) = \nabla_X \theta(Y) - \nabla_Y \theta(X) - \theta([X, Y])$$

- $H \in \Lambda^2(N, \zeta^*)$  est définie par:

$$(2.20) \quad H(X, Y) = \nabla_X \eta(Y) - \nabla_Y \eta(X) - \eta([X, Y])$$

- $K \in \Lambda^2(N, \zeta \otimes \zeta^*)$  est définie par:

$$(2.21) \quad K(X, Y).s = R(X, Y).s + [\theta, \eta](X, Y).s$$

où  $R$  désigne la courbure de la connexion linéaire  $\nabla$  et où on a noté:

$[\theta, \eta]$  l'élément de  $\Lambda^2(N, \zeta \otimes \zeta^*)$  défini par:

$$[\theta, \eta](X, Y).s = \theta(X)\langle \eta(Y), s \rangle + \#_g(\eta(X))\langle b_g(\theta(Y)), s \rangle - \langle \theta(X), \eta(Y) \rangle s \\ - \theta(Y)\langle \eta(X), s \rangle - \#_g(\eta(Y))\langle b_g(\theta(X)), s \rangle + \langle \theta(Y), \eta(X) \rangle s$$

(On remarquera que le terme:  $\#_g(\eta(X))\langle b_g(\theta(Y)), s \rangle$  ne dépend pas du choix de la métrique  $g$  de  $[g_{p,q}]$ ).

En particulier si  $\zeta = T(N)$ ,  $\Theta, H$  et  $K$  définissent des tenseurs sur  $N$  de types respectifs (1,2), (0,3), (1,3) que l'on appellera *tenseurs de courbure de la connexion généralisée D*.

#### II.2.4. Connexions de Cartan et cercles conformes

Soit  $\zeta = (M, \pi, N, E_{p,q})$  un fibré vectoriel muni d'une classe conforme  $[g_{p,q}]$  de métriques de type  $(p, q)$ . Dans ce paragraphe, nous considérons des connexions généralisées conformes sur  $\zeta$  particulières, liées à la notion de connexion de Cartan (cf [4], [5], [9]).

DEFINITION II.2.2. Soit  $\chi = (\overline{M}, \overline{\pi}, N)$  un fibré de fibre-type  $\overline{E}_{p,q}$ . On suppose que:  $\dim E_{p,q} = \dim N$  (soit  $m = n$ ), et que  $\chi$  a pour groupe structural  $G_{0^*}$ , sous-groupe d'isotropie de  $PO(p+1, q+1)$  pour le point  $\overline{x}_0$  de  $\overline{E}_{p,q}$  (cf §1.1). Soit  $P_\chi$  le fibré principal des repères de  $\chi$  et  $\tilde{P}_\chi$  le fibré principal:

$$P_\chi \times_{G_{0^*}} PO(p+1, q+1)$$

Le fibré  $\chi$  admet une section canonique  $\sigma_0$  définie par:

$$\sigma_0(x) = p_x \cdot \overline{x}_0, \quad p_x \in (P_\chi)_x$$

On appelle *connexion de Cartan conforme* sur  $\chi$  toute connexion associée à une connexion principale sur  $\tilde{P}_\chi$  vérifiant la condition suivante:

L'application  $\beta$  qui à tout champ de vecteurs  $X$  sur  $N$  associe la composante verticale de  $T\sigma_0(X)$  est une soudure de  $N$  et  $\overline{M}$ , i.e.  $(\sigma_0, \beta)$  définit un isomorphisme de fibrés vectoriels de  $T(N)$  sur  $V(\sigma_0(N))$ , fibré vectoriel de base  $\sigma_0(N)$  induit par le fibré vertical  $V(\overline{M})$ .

Supposons que le rang du fibré  $\zeta$  soit égal à  $n$  et considérons le fibré de Möbius  $\bar{\zeta}$  associé à  $\zeta$  (cf § II.2.1.). Ce fibré  $\bar{\zeta}$  a pour groupe structural:  $\tilde{h} \circ \tilde{j}(CO(p, q))$ , qui est un sous-groupe de  $G_{0..}$ . Il peut donc être considéré comme un fibré à groupe structural  $G_{0..}$ . A ce titre, il admet une section canonique  $\sigma_0$  qui est liée à la section nulle  $s_0$  du fibré vectoriel  $\zeta$  par la relation:

$$\sigma_0 = \tilde{\varphi} \circ s_0,$$

où  $\tilde{\varphi} : \zeta \rightarrow \bar{\zeta}$ , est le  $N$ -morphisme de fibrations différentiables défini en (2.5).

Soit  $D = (\theta, \nabla, \eta)$  une connexion généralisée conforme sur  $\zeta$ . Par définition (cf déf.II.2.1),  $D$  est issue d'une connexion d'Ehresmann conforme  $H(\bar{M})$  sur le fibré de Möbius  $\bar{\zeta}$ . Considérons l'application  $\beta : T(N) \rightarrow V(\bar{M})$  (définie par la connexion  $H(\bar{M})$ ), qui a été introduite dans la définition II.2.2. Il résulte de la définition de  $D$  que:

$$\beta = \tilde{\varphi}_* \circ (\alpha_M)_{s_0}^{-1} \circ \theta$$

(On rappelle que  $\alpha_M$  est le morphisme canonique  $V(M) \rightarrow M$ ).

$\tilde{\varphi}$  étant un difféomorphisme local (cf (2.5)),  $\beta$  est une soudure de  $N$  et  $\bar{M}$  si et seulement si  $\theta$  vérifie la condition:

$$\theta(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

Ainsi  $H(\bar{M})$  est une connexion de Cartan si et seulement si  $\theta$  vérifie (2.22).

*Les connexions généralisées  $D = (\theta, \nabla, \eta)$  telles que  $\theta$  vérifie (2.22) seront donc dites «de Cartan».*

*Soit  $D$  une telle connexion.* En considérant la connexion de Cartan  $H(\bar{M})$  dont elle est issue, on peut introduire la notion de *cercle conforme* (resp. *droite minima*):

**DEFINITION II.2.3.** *Soit  $H(\bar{M})$  une connexion de Cartan conforme sur un fibré  $\chi = (\bar{M}, \bar{\pi}, N)$  de fibre-type  $\bar{E}_{p,q}$  ( $p + q = n$ ) et de groupe structural  $G_{0..}$ . Soit  $\sigma_0$  la section canonique de ce fibré.*

*Un chemin  $(x_t)$  de  $N$  est dit *cercle conforme* (resp. *droite minima*) si le développement du chemin  $(\sigma_0(x_t))$  de  $\bar{M}$  dans la fibre au-dessus d'un point de  $(x_t)$  (fibre que l'on identifie à  $\bar{E}_{p,q}$ ) est un *cercle conforme* (resp. *une droite minima*) de  $\bar{E}_{p,q}$ .*

Nous allons caractériser les cercles conformes (resp. les droites minima) définis par la connexion généralisée «de Cartan»  $D$  considérée plus haut.

Soit  $\gamma = (x_t)$  un cercle conforme de  $N$ , supposé simple et régulier, défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$ . Par définition (cf par exemple [4], [5]), le développement du chemin  $(\sigma_0(x_t))$  dans la fibre de  $\bar{M}$  au-dessus d'un point  $x_{t_0}$  de  $(x_t)$  est le chemin  $(u_t)$  :

$$\bar{u}_t = \bar{\tau}_\gamma^{-1} \cdot \sigma_0(x_t),$$

$\bar{\tau}_\gamma$  étant le transport parallèle le long de  $\gamma$  dans  $\bar{M}$  associé à la connexion d'Ehresmann  $H(\bar{M})$ .

Reprenons les notations introduites dans les paragraphes II.2.1. et II.2.2:

On a:  $\bar{i}(\bar{u}_t) = \bar{\tau}_\gamma^{-1} \circ \bar{i} \circ \sigma_0(x_t) = \bar{\tau}_\gamma^{-1} \circ \bar{\pi} \circ \bar{\rho}_g \circ \sigma_0(x_t) = \bar{\pi} \circ \tau_\gamma^{-1} \circ \bar{\rho}_g \circ \sigma_0(x_t)$  (cf (2.6), (2.8), (2.9)).

D'où:  $\bar{i}(\bar{u}_t) = \bar{\pi}(u_t)$ , où  $(u_t)$  est le développement du chemin  $(\bar{\rho}_g \circ \sigma_0(x_t))$  dans la fibre de  $M_1$  en  $x_{t_0}$ .

Soit  $\bar{p}_0$  un élément quelconque de la fibre de  $\bar{P}_1$  en  $x_{t_0}$ ; on peut supposer que  $\bar{p}_0 = \bar{h}(p_0)$ , où  $p_0$  appartient à la fibre de  $P_1$  en  $x_{t_0}$ . Par hypothèse on a:  $\bar{i}(u_t) = \bar{p}_0 \cdot \eta_t$  où  $(\eta_t)$  est un cercle conforme de  $\bar{E}_{p,q}$ . D'après la proposition I.2.1 du § 1.2., il existe un chemin différentiable  $(z_t)$  de  $E_{p+1,q+1}$ , défini sur  $I$  vérifiant les conditions suivantes pour tout  $t$  dans  $I$ :

$$\eta_t = \pi(z_t); Q_{p+1,q+1}(z_t) = 0; \frac{d^3}{dr^3}(z_t) = 0; Q_{p+1,q+1}(\dot{z}_t) \neq 0$$

( $r$  étant un paramètre sur la courbe).

On a donc:  $\bar{\pi}(u_t) = \bar{i}(\bar{u}_t) = \bar{h}(p_0) \cdot \eta_t = \bar{\pi}(p_0 \cdot z_t)$  par définition de  $\bar{\pi}$ .

Il existe donc un chemin différentiable:  $\lambda : t \rightarrow \lambda_t, I \rightarrow \mathbf{R}^*$  tel que:  $\lambda_t \cdot u_t = p_0 \cdot z_t$   
D'où il résulte que:

$$\frac{d^3}{dr^3}(\lambda_t \cdot u_t) = 0$$

Soit  $\nabla$  la connexion linéaire sur le fibré vectoriel «augmenté»  $\zeta_1$ , liée à  $D$  par l'intermédiaire d'une transformation isotropique  $\bar{\rho}_g$  (cf prop. II.2.1.;  $g$  est une métrique quelconque de  $[g_{p,q}]$ ). Désignons par  $S_0$  la section de  $\zeta_1$  définie par  $S_0 = \bar{\rho}_g \circ \sigma_0$

Par définition  $\dot{u}_t$  est la composante verticale de  $\overline{\bar{\rho}_g \circ \sigma_0(x_t)}$ , c'est-à-dire:

$$\nabla_{\dot{x}_t} S_0$$

On a donc:

$$(2.23) \quad \nabla_{\dot{x}_t}^3(\lambda S_0) = 0$$

De plus l'hypothèse:  $Q_{p+1,q+1}(\dot{z}_t) \neq 0, \forall t \in I$ , entraîne que:

$$(2.24) \quad g_{p+1,q+1}(\nabla_{\dot{x}_t}(\lambda S_0), \nabla_{\dot{x}_t}(\lambda S_0)) \neq 0$$

Inversement, soit  $(x_t)$  un chemin différentiable simple et régulier de  $N$ , défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$ . Supposons qu'il existe un chemin différentiable  $\lambda : t \rightarrow \mathbf{R}^*$ , ainsi qu'un paramètre  $\tau$  sur la courbe tels que l'on ait (2.23) et (2.24). Soit  $(u_t)$  le développement du chemin  $(S_0(t))$  dans la fibre de  $M_1$  au-dessus de  $x_{t_0}$ . On a:  $u_t = p_0 \cdot z_t$ , où  $(z_t)$  est un chemin de  $E_{p+1,q+1}$  qui vérifie les conditions de la proposition I.2.1. Le chemin  $(\eta_t)$  défini par:  $\eta_t = \pi(z_t)$  est donc un cercle conforme de  $\overline{E}_{p,q}$ . D'après la démonstration précédente, le développement  $(\bar{u}_t)$  du chemin  $(\sigma_0(x_t))$  dans la fibre de  $\overline{M}$  au-dessus de  $x_{t_0}$  est donc un cercle conforme de la fibre. Par définition, le chemin  $(x_t)$  est donc un cercle conforme de  $N$ . On peut faire une démonstration identique en partant d'une droite minima, on a donc le résultat suivant:

**PROPOSITION II.2.3.** *Soit  $D$  une connexion conforme de Cartan sur un fibré  $\zeta = (M, \pi, N, E_{p,q})$  muni d'une classe conforme  $[g_{p,q}]$  de métriques de type  $(p, q)$ . Soit  $s_0$  la section nulle de ce fibré.*

*Soit  $\nabla$  la connexion linéaire pseudo-riemannienne sur le fibré «augmenté»  $\zeta_1$ , liée à  $D$  par l'intermédiaire d'une transformation isotropique  $\tilde{\rho}_g$  (cf prop. II.2.1). Désignons par  $S_0$  la section du fibré  $\zeta_1$  définie par:*

$$S_0 = \tilde{\rho}_g \circ s_0$$

*Pour qu'un chemin  $\gamma : t \rightarrow x_t, I \rightarrow N$ , simple et régulier, soit un cercle conforme (resp. une droite minima) il faut et il suffit qu'il existe un chemin  $\lambda : I \rightarrow \mathbf{R}^*$  tel que:*

- $\nabla_{\dot{x}_t}^3 \lambda S_0 = 0$  (resp.  $\nabla_{\dot{x}_t}^2 \lambda S_0 = 0$ ) ( $\tau$  étant un paramètre convenable sur la courbe).
- $g_{p+1,q+1}(\nabla_{\dot{x}_t} \lambda S_0, \nabla_{\dot{x}_t} \lambda S_0) \neq 0$  (resp.  $g_{p+1,q+1}(\nabla_{\dot{x}_t} \lambda S_0, \nabla_{\dot{x}_t} \lambda S_0) = 0$ ) ■

On peut comparer ce résultat et ceux de [18], [19], obtenus selon une démarche différente, basée sur la théorie des repères mobiles conformes d'E. Cartan.

L'étude détaillée de ces cercles conformes et de ces droites minima sera développée ultérieurement.

### II.3. Une application aux theories relativistes de l'électromagnétisme

Pour conclure, nous donnons un exemple d'application de la notion de connexion généralisée conforme sur un fibré vectoriel.

Considérons la variété espace-temps  $V$  munie d'une métrique  $g$  de type  $(1,3)$   $(+, -, -, -)$ .

En relativité générale classique, un *champ électromagnétique* est représenté par une 2-forme  $F$  sur  $V$  vérifiant les équations de Maxwell:

$$dF = 0$$

$\delta F + J = 0$ , où  $\delta$  désigne l'opérateur codifférentielle et  $J$  la 1-forme densité de charge-courant.

Soit  $F$  un champ électromagnétique sur  $V$ .

A la métrique  $g$  et au champ électromagnétique  $F$ , on associe la connexion généralisée conforme  $D = (\theta, \nabla, \eta)$  sur  $T(V)$  déterminée par:

- (i) la 1-forme  $\eta$  à valeurs dans  $T(V)^*$  définie par:  $\eta(X) = -X \lrcorner F$
- (ii) la 1-forme  $\theta$  à valeurs dans  $T(V)$  définie par:  $\theta(X) = -\frac{1}{2}\#_g(\eta(X))$
- (iii) la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  sur  $V$ .

Par définition (cf Prop. II.2.2.) on a:

$$(3.1) \quad D_X Y = \nabla_X Y + \theta(X)(1 - g(Y, Y)), \quad X, Y \in T(N)$$

Considérons les 2-formes  $\Theta, K, H$ , associées à la courbure de  $D$  (cf (2.18), (2.19), (2.20), (2.21)).

Ces 2-formes définissent des tenseurs sur  $V$  de types respectifs (1,2), (1,3), (0,3). Les composantes locales de ces tenseurs dans un système de coordonnées  $\{x^i\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , sont données par:

$$\begin{aligned} T_{jk}^i &= \langle dx^i, \Theta(\partial_j, \partial_k) \rangle = -\frac{1}{2}(\nabla_j F_k^i - \nabla_k F_j^i) \\ K_{jkl}^i &= \langle dx^i, K(\partial_k, \partial_\ell)\partial_j \rangle = R_{jkl}^i - F_k^i F_{j\ell} + F_\ell^i F_{jk} \\ H_{ijk} &= H(\partial_j, \partial_k)\partial_i = \nabla_j F_{ik} - \nabla_k F_{ij} \end{aligned}$$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors:

$$\begin{cases} \sum_{p,c} H(X, Y) \cdot Z = 0 \\ X, Y, Z \\ 2T + J = 0 \end{cases}$$

où  $T$  est la 1-forme sur  $N$  de composantes locales  $T_i = (T_{k_i}^k)$ .

L'invariance conforme des équations de Maxwell résulte de l'invariance conforme des tenseurs de courbure de  $D$ .

Considérons maintenant le tenseur  $K$  de type (0,2) défini par :

$$K(\partial_i, \partial_j) \equiv K_{ij} = K_{ikj}^k$$

On a:  $K_{ij} = R_{ij} + F_{ik}F_j^k$ , ( $R_{ij}$ ) étant les composantes de Ric, tenseur de Ricci de  $\nabla$ .

Désignons par  $\mathbf{K}$  la fonction sur  $V$  définie par  $\mathbf{K} = g^{ij}K_{ij}$ , on a:

$$K - \frac{\mathbf{K}}{4}g = \text{Ric} - \frac{\mathbf{S}}{4}g + E$$

où  $\mathbf{S}$  est la courbure scalaire de  $\nabla$  et  $E$  le tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique.

Ce tenseur est défini par:

$$E_{ij} = \frac{1}{4} g_{ij} F_{k\ell} F^{k\ell} - F_{ik} F_j^k$$

Remarquons alors que les équations définies par:  $K - \frac{K}{4}g = 0$ , peuvent s'interpréter comme les équations d'Einstein d'un schéma de type «électromagnétique pur».

En effet ces schémas vérifient:  $J = 0$  et  $G \equiv Ric - \frac{S}{2}g = \lambda. E$ , où  $\lambda$  est une constante (cf par ex. [11] §1 p. 154).

On a donc:  $S = 0$  car  $E$  est de trace nulle.

Ainsi le tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique peut être défini géométriquement, à partir d'un des tenseurs de courbure de la connexion généralisée  $D$  définie plus haut. On peut également interpréter les équations des trajectoires de certaines particules chargées en considérant cette connexion  $D$  :

Dans [11] (cf §33 p. 68) A. Lichnerowicz a établi que, en présence d'un champ électromagnétique  $F$ , la trajectoire d'une particule chargée pour laquelle le rapport de la charge à la masse  $\frac{e}{m}$  est constant, est la courbe  $\gamma$ , orientée dans le temps et paramétrée par la longueur d'arc  $s$ , vérifiant les équations:

$$(3.2) \quad \nabla_{\gamma_s} \gamma_s = \frac{e}{m} \tilde{F} \cdot \gamma_s$$

où  $\gamma_s$  est le vecteur tangent à la courbe en  $\gamma(s)$  et  $\tilde{F}$  la 1-forme sur  $V$  à valeurs dans  $T(V)$  définie par:  $g(\tilde{F}(X), Y) = F(Y, X)$

PROPOSITION II.3.1.. *En présence d'un champ électromagnétique, la trajectoire d'une particule chargée pour laquelle le rapport de la charge à la masse  $\frac{e}{m}$  est constant est la courbe ( $\gamma_t$ ) orientée dans le temps vérifiant :*

- $D_{\gamma_t} \gamma_t = 0$ , où  $D$  est la connexion généralisée conforme définie en (3.1).
- $g(\gamma_t, \gamma_t)^{1/2} = -\frac{e}{m} + \sqrt{\left(\frac{e}{m}\right)^2 + 1} = \mu$

En effet  $D_{\gamma_t} \gamma_t = 0$ , donne:

$$\nabla_{\gamma_t} \gamma_t - \frac{1}{2} \tilde{F} \cdot \gamma_t (1 - \mu^2) = 0$$

D'où en paramétrant par la longueur de l'arc:

$$\nabla_{\gamma_s} \gamma_s = \frac{1}{2} \tilde{F} \cdot \gamma_s (\mu^{-1} - \mu), \text{ car } \mu \text{ est une constante.}$$

Comme  $\mu$  est racine de l'équation:  $X^2 + 2\frac{e}{m}X - 1 = 0$ , on obtient finalement l'équation (3.2). ■

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ANGLES: *Construction de revêtements du groupe conforme d'un espace vectoriel muni d'une métrique de type  $(p, q)$* , Annales l'I.H.P., Sect. A Vol.33 n. 1980, 33-51.
- [2] E. CARTAN:  
 a) *Les espaces à connexion conforme*, Annales de la Société Polonaise de Math. Tome 2 (1923), 177-221.  
 b) *La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à  $n \geq 5$  dimensions*, Bull. Soc. Math. France **45** (1917), 57-121.
- [3] A. CRUMEYROLLE: *Algèbres de Clifford et spineurs.*, Cours et séminaires du département de Math. de l'Université de Toulouse III.
- [4] J. DIEUDONNE: *Eléments d'Analyse*, Tome 4, Gauthier-Villars, 1971.
- [5] C. EHRESMANN: *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles 1950, CBRM.
- [6] J. FERRAND: *Les géodésiques des structures conformes*, C.R.A.S Paris, t.294 (17 mai 1982).
- [7] GREUB, HALPERIN, VANSTONE:  
 a) *Connections, curvature and cohomology*, Vol 1, Academic Press, 1972.  
 b) *Connections, curvature and cohomology*, Vol 2, Academic Press, 1972.
- [8] R. HERMANN: *Gauge fields and Cartan-Ehresmann connections*, Part A, Math. Sci. Press. Brookline, 1975.
- [9] S. KOBAYASHI: *Transformation groups in differential geometry*, Springer-Verlag.
- [10] S. KOBAYASHI, R. NOMIZU: *Foundations of differential geometry*, Vol.1, Interscience, New-York, 1963.
- [11] A. LICHTNEROWICZ: *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson.
- [12] P. LONESTO: *Conformal transformations and Clifford algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 79 n. 4 (1980).
- [13] L.MANGIAROTTI, M. MODUGNO: *Graded Lie algebras and connections on a fibered space*, J. Math pures et appl., **63** (1984), 111-120.
- [14] J.L. MILHORAT: *Sur les connexions conformes*, Thèse de troisième cycle, Université de Toulouse III, 1986.
- [15] K.OGIUE: *Theory of conformal connections*, Kodai Math. Sem. Rep. 19 (1967), 193-224.
- [16] PHAM-MAU-QUAN: *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, 1969.
- [17] R.K. SACHS, H. WU: *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag.
- [18] A. TOURE, *Divers aspects des connexions conformes*, Thèse de troisième cycle, Université Paris VI, 1981.
- [19] K. YANO:  
 a) *Sur les circonférences généralisées dans un espace à connexion conforme*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **14** (1938), 329-332.  
 b) *Sur la théorie des espaces à connexion conforme*, J of the Faculty of Science, Tokyo Imp. Univ. **4** (1939), 1-59.  
 P. GAUDUCHON: *Connexion canonique et géométrie conforme*, Preprint, Paris VII.

*Manuscript received: February 14, 1989*